Второй этап республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика». 2019/2020 учебный год

9 класс

1. Все 50 девятиклассников некоторой школы занимаются либо футболом, либо волейболом, либо баскетболом, либо несколькими перечисленными видами спорта. В понедельник все футболисты поехали на районные соревнования, и оказалось, что в школе осталось всего 11 девятиклассников, играющих в баскетбол. Во вторник на соревнования поехали все баскетболисты, выяснилось, что в школе осталось только 13 девятиклассников, играющих в волейбол, и 23 девятиклассника, играющих в футбол. Сколько девятиклассников занимается всеми тремя видами спорта, если известно, что любыми двумя видами спорта занимается одинаковое количество девятиклассников?

2. В треугольнике ABC угол $B = 20^\circ$, угол $C = 40^\circ$. Биссектриса $AD = 3$. Найдите разность длин сторон $BC - AB$.

3. Первый член последовательности равен 1, а каждый следующий, начиная со второго, получается прибавлением к предыдущему члену суммы его цифр. Встретится ли в этой последовательности число 20192019?

4. Найдите наименьшее положительное действительное число x, удовлетворяющее неравенству $[x]\cdot\{x\} \geq 3$. В данном неравенстве $[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x, $\{x\} = x-[x]$ – дробная часть числа x.

5. Вещественный корень квадратного уравнения $ax^2+bx+b=0$ $(a \neq 0)$ умножили на вещественный корень квадратного уравнения $ax^2+ax+b=0$ и получили 1. Найдите всевозможные пары таких корней.

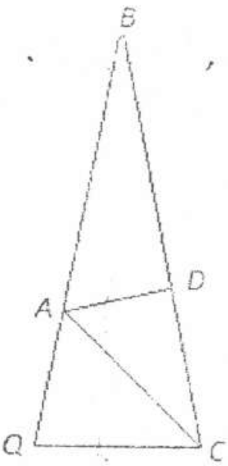
Второй этап республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика».
2019/2020 учебный год

Решения.
9 класс

Ответ: 3 девятиклассника.

Решение: Заметим, что по условию каждый учащийся занимается хотя бы одним видом спорта. После того, как уехали все футболисты, в баскетбол могли играть только те, кто занимается только баскетболом, либо те, кто занимается либо баскетболом, либо волейболом (всего 11 человек). Аналогично, во втором случае 13 девятиклассников – это либо те, кто занимается только волейболом, либо те, кто занимается либо волейболом, либо футболом, а 23 девятиклассника – это те, кто занимается только футболом, или те, кто занимается либо футболом, либо волейболом. Таким образом, если мы просуммируем рассмотренных девятиклассников (всего 11 + 13 + 23 = 47), то получим, что мы посчитали по одному разу всех девятиклассников, занимающихся только одним видом спорта, один раз посчитали тех, кто занимается баскетболом и волейболом, два раза посчитали тех, кто занимается футболом и волейболом и ни разу не посчитали тех, кто занимается футболом и волейболом и тех, кто занимается тремя видами спорта. Поскольку по условию любыми двумя видами спорта занимаются одинаковое количество девятиклассников, получаем, что 47 будет и учащихся, занимающихся либо только одним, либо только двумя видами спорта. Тогда 50 – 47 = 3 девятиклассника, занимаются тремя видами спорта.

Примечание. Легко и наглядно решение этой задачи можно получить, используя диаграмму Венна. Ответ 3 может быть получен случайно, просьба смотреть на степень обоснованности данного ответа.



2. Ответ: 3.

Решение. Т.к. сумма углов треугольника равна 180^o получаем, что $\angle BAC = 120^o$, откуда $\angle DAC = 60^o$ (AD – биссектриса). Дополнительное построение: продлим сторону AB за точку A до тех пор, пока $QB = BC$, получим равнобедренный треугольник QBC. Т.к. угол B равен 20 градусов, получаем, что $\angle BQC = \angle BCQ = 80^o$. Поскольку $\angle BCQ = 80^o$, а $\angle BCA = 40^o$, получаем, что $\angle ACQ = 40^o$. Угол QAC является смежным к углу ВАС, откуда $\angle QAC = 60^o$.

Треугольник ADC равен треугольнику AQC (т.к. $\angle QAC = \angle DAC = 60^o$, $\angle ACQ = \angle ACD = 40^o$, сторона AC общая), откуда получаем, что $AQ = AD = 3$. И, наконец, $BC - AB = BQ - AB = AQ = 3$.

Примечание. Можно решать задачу по другому, например, можно на стороне BC отложить отрезок $BM = AB$.

3. Ответ: нет.

Решение. Известен факт, что число дает при делении на 3 такой же остаток, что и его сумма цифр. Таким образом, если число при делении на 3 дает остаток 1, то при прибавлении к нему его суммы цифр, результат будет давать остаток 2 (1+1) при делении на 3. Если же число дает остаток 2, при делении на 3, то после прибавления к нему его суммы цифр, получим остаток 1 (2+2 = 4 дает остаток 1) при делении на 3. Итак, первый член последовательности дает остаток 1 при делении на 3, следовательно, второй дает остаток 2, третий – 1 и т.д., остатки 1 и 2 будут чередоваться. Отсюда следует, что ни один член последовательности не делится на 3, а поскольку 20192019 на 3 делится, то это число не может встретиться в построенной последовательности.

4. Ответ: 4,75.

Решение. Заметим, что дробная часть числа всегда меньше 1, т.е. $\{x\} < 1$, тогда чтобы $[x]\{x\} \geq 3$ необходимо, чтобы $[x] \geq 4$. Наименьшая целая часть при этом равна $[x] = 4$. Тогда $4\{x\} \geq 3$, откуда $\{x\} \geq 0{,}75$.

5. Ответ: $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Решение. Пусть t – искомый корень первого уравнения, тогда $at^2+bt+b = 0$, q – искомый корень второго уравнения, $aq^2+aq+b = 0$ (*), кроме того $tq = 1$. Домножим первое уравнение на q^2, получим, что $bq^2+bq+a = 0$ (**). Умножим равенство (*) на b, а равенство (**) на a и вычтем из первого равенства второе, получим, что $b^2 = a^2$. Имеем два случая.

1 случай: $a = b$. Тогда каждое из уравнений перепишется в виде $ax^2+ax+a = 0$ или после сокращения на a, $x^2+x+1 = 0$. Это уравнение не имеет вещественных корней, поэтому не подходит под условие задачи.

2 случай: $a = -b$. Тогда уравнения перепишутся в виде $ax^2-ax-a = 0$ и $ax^2+ax-a = 0$. Сократим оба уравнения на a, по условию $a \neq 0$. Решив полученные два квадратных уравнения и перебрав возможные варианты, получим ответ.